Génération de matrices pour la programmation quadratique binaire

Lucas Létocart[1], Enrico Bettiol[1], Immanuel Bomze[2], Francesco Rinaldi[3], Emiliano Traversi[1]

[1] LIPN, Univ. Sorbonne Paris Nord, CNRS, Villetaneuse, France
lucas.letocart@lipn.univ-paris13.fr
[2] ISOR, VCOR, Université de Vienne, Autriche
[3] Dipartimento di Matematica, Université de Padoue, Italie

Mots-clés : *programmation quadratique binaire, génération de matrices, décomposition.*

1 Introduction

Nous proposons dans ce travail une nouvelle approche pour la génération de bornes de très bonne qualité pour la programmation quadratique binaire (objectif et contraintes quadratiques). Nous présentons une nouvelle relaxation basée sur le Boolean Quadric Polytope que nous résolvons via une reformulation de Dantzig-Wolfe dans l'espace des matrices.

2 Décomposition et géneration de matrices

Un problème binaire quadratique générique peut être formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\min\ & x^\top Q x && && \text{(1a)}\\
\text{s. t. } & x^\top A_i x \le b_i && \forall i \in \mathcal{I} && \text{(1b)}\\
& x \in \{0,1\}^n\,, && && \text{(1c)}
\end{aligned}$$

avec $\mathcal{I}$ l'ensemble des indices des contraintes, Q et A_i sont des matrices $n \times n$ symétriques et $b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \mathcal{I}$. Aucune autre hypothèse n'est requise, en particulier, la relaxation continue du problème peut être non convexe. Nous proposons une nouvelle relaxation de ce problème qui permet d'obtenir des bornes de meilleure qualité que celles obtenues par une relaxation SDP. Nous remplaçons les matrices X des contraintes $X = xx^\top$ par une combinaison des matrices de rang 1, X_p, du type $X_p = x_p x_p^\top$, avec $x_p \in \{0,1\}^n$. Le problème obtenu est le suivant :

$$\begin{aligned}
\min\ & \langle Q, X\rangle && && \text{(2a)}\\
\text{s. t. } & \langle A_i, X\rangle \le b_i && \forall i \in \mathcal{I} && \text{(2b)}\\
& X = \sum_{p\in\mathscr{P}} \lambda_p X_p && && \text{(2c)}\\
& \sum_{p\in\mathscr{P}} \lambda_p = 1 && && \text{(2d)}\\
& \lambda_p \ge 0 && \forall p \in \mathscr{P}\,, && \text{(2e)}
\end{aligned}$$

avec $\mathscr{P} = \{p \in \mathbb{N} : x_p \in \{0,1\}^n\}$ l'ensemble des indices de tous les points extrêmes binaires x_p. Ainsi $\mathscr{P}$ est un ensemble fini de taille exponentielle en n, $|\mathscr{P}| = 2^n$.

Proposition 1. *Le problème* (2) *est une relaxation de* (1)*, et son domaine est le Boolean Quadric Polytope BQP^n [1] de dimension n.*

3 Décomposition par blocs

Pour les problèmes blocs-décomposables, nous étendons cette relaxation et nous analysons ses propriétés théoriques. Si la taille du chevauchement entre les blocs est au plus de deux, nous montrons l'équivalence avec la relaxation BQP du problème non décomposé. Nous prouvons que cette équivalence n'est pas valide quand le graphe associé n'est pas cordal et nous conjecturons que l'équivalence reste valide pour toute structure de blocs dans un graphe cordal associé.

4 Résultats expérimentaux

L'algorithme de décomposition ainsi obtenu dans l'espace des matrices consiste en une génération de matrices (par analogie à la génération de colonnes). Nous montrons sur différents problèmes quadratiques binaires l'efficacité de notre approche qui permet d'obtenir des bornes de très bonne qualité en des temps de calcul raisonnables.

Références

[1] Manfred Padberg. The Boolean Quadric Polytope : some characteristics, facets and relatives. *Mathematical Programming*, 45(1-3) :139–172, 1989.