Nouvelle modélisation des jeux extensifs basée sur des graphes

Paolo Zappalà[1,2], Amal Benhamiche[1], Matthieu Chardy[1],
Francesco De-Pellegrini[2], Rosa Figueiredo[2]

[1] Orange Innovation, Orange Gardens, 92320 Chatillon, France
name.surname@orange.fr
[2] LIA, Avignon Université, 84029 Avignon, France
name.surname@univ-avignon.fr

Mots-clés : *jeux en forme extensive, équilibre de Nash, théorie des graphes.*

1 Introduction

Les jeux en forme extensive, dits aussi *jeux extensifs*, décrivent les situations où plusieurs joueurs agissent l'un après l'autre (de maniere séquentielle). La representation la plus commune des jeux est l'arbre des decisions que les joueurs peuvent prendre au cours du jeu. Nous allons présenter ici une nouvelle modélisation des jeux extensifs avec deux joueurs sous forme de graphe de ses possibles réalisations. Nous montrons aussi que le calcul des équilibres de Nash des jeux extensifs peut être effectué directement sur le graphe modélisant le jeu.

2 Formulation basée sur des graphes

Considérons les jeux en forme extensive à mémoire parfaite et information parfaite (cf. Définition 1). À tout instant du jeu, l'un des joueurs $i \in \mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ observe une *histoire* $h' \in H'$, i.e. une séquence d'actions effectuées par lui et par d'autres joueurs, et dispose ainsi d'un ensemble d'actions à jouer $\mathcal{A}(h')$. Dans l'exemple de la figure Fig. 1, si le joueur $i = 1$ observe les actions $h' = (a_1, b_2)$, il a ensuite à disposition deux actions $\mathcal{A}(h') = \{a_3, a_4\}$. Si aucune action n'est disponible $\mathcal{A}(h) = \emptyset$, le jeu se termine. Sinon, les histoires terminales sont appelées *réalisations* du jeu. Dans la figure Fig. 1, l'histoire $h_2 = \{a_1, b_1\}$ est terminale. La fonction d'utilité $u_i : H \to \mathbb{R}$ évalue chaque réalisation $h \in H$ pour chaque joueur $i \in \mathcal{I}$.

Définition 1 (jeu en forme extensive) *Un jeu en forme extensive est un tuple* $\Gamma = \langle \mathcal{I}, \mathcal{A}, H', H, P, u \rangle$*, dorénavant aussi* $\Gamma = \langle \mathcal{I}, H, u \rangle$*, où :*
- $\mathcal{I} = \{1, \dots, N\}$ *est l'ensemble des joueurs ;*
- H' *est l'ensemble des histoires comprenant* $\emptyset \in H'$ *;*
- $\mathcal{A} : h' \in H' \to A$ *est la fonction qui associe un ensemble d'actions à chaque histoire :* $\forall a \in A,\ h' + (a) \in H'$ *;*
- $H = \{h \in H' : \mathcal{A}(h) = \emptyset\} \subset H'$ *est l'ensemble des réalisations ;*
- $P : H' \setminus H \to \mathcal{I}$ *est la fonction qui indique le joueur* $P(h) \in \mathcal{I}$ *agissant après avoir observé l'histoire* $h \in H' \setminus H$.
- $u = (u_i)_{i \in \mathcal{I}}$*, avec* $u_i : H \to \mathbb{R}$*, est la fonction d'utilité.*

Tout joueur doit définir sa stratégie, i.e. choisir une action pour toute histoire observée. Formellement, la *stratégie* d'un joueur s_i est une fonction $s_i \in S_i = \{s_i : h \in H_i \mapsto a \in \mathcal{A}(h)\}$ qui donne pour toute histoire $h \in H_i = \{h \in H : P(h) = i\}$ une action disponible $a \in \mathcal{A}(h)$. Dans l'exemple de la figure Fig 1 la stratégie $\overline{s}_1$ du joueur 1 est telle qu'il choisit a_1 au première nœud et a_4 au deuxième nœud.

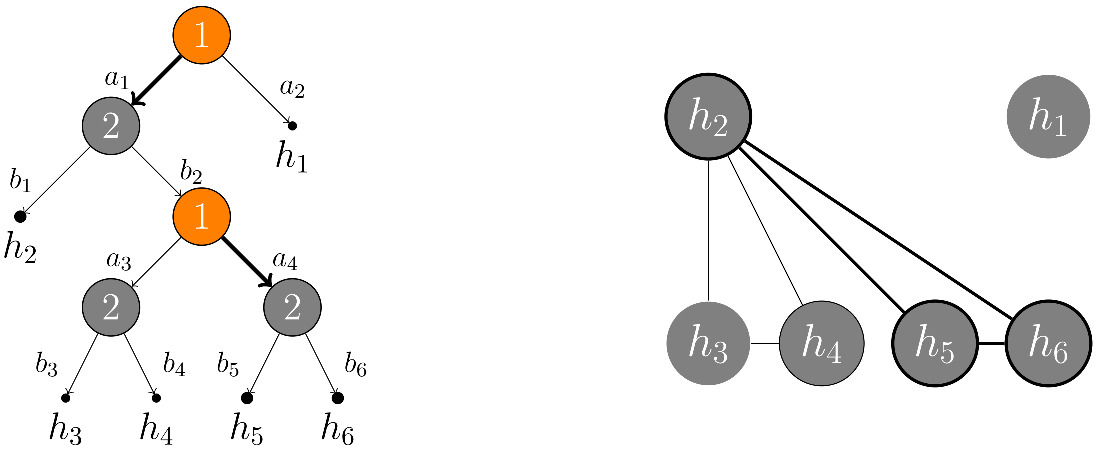

FIG. 1 – Jeu en forme extensive (gauche) et en forme de graphe (droite).

Nous allons limiter l'analyse aux jeux avec deux joueurs $\mathcal{I} = \{1, 2\}$. Nous observons que le choix d'une stratégie limite l'ensemble des réalisations possibles. Nous définissons $H(s_1) = \{h \in H, \exists s_2 \in S_2 : (s_1, s_2) \mapsto h\}\}$ comme l'ensemble des réalisations possibles par une stratégie $s_1 \in S_1$. Dans l'exemple, $H(\overline{s}_1) = \{h_2, h_5, h_6\}$. Nous définissons aussi la propriété de *compatibilité* entre deux réalisations $h, h' \in H$ pour indiquer l'existence d'une stratégie du premier joueur s_1 tel que $h, h' \in H(s_1)$. Cette propriété nous permet de définir le graphe des réalisations du jeu.

Définition 2 (modèle de graphe) *Le graphe du jeu $\Gamma = \langle \mathcal{I}, H, u \rangle$ est un tuple $\langle H, E, u \rangle$, où H est l'ensemble des nœuds du graphe associés aux réalisations, $E \subset H^2$ est l'ensemble des arcs reliant tout couple de réalisations compatibles, $u : H \to \mathbb{R}^2$ est l'utilité des réalisations.*

Examiner les stratégies est peu pratique, car elles sont souvent exponentielles dans la taille du jeu. Le prochain résultat montre comment les analyser sur le graphe associé au jeu.

Théorème 1 *Dans un jeu $\Gamma = \langle \mathcal{I}, H, u \rangle$ pour toute stratégie $s_1 \in S_1$ l'ensemble de ses réalisations $H(s_1)$ forme une clique maximale dans le graphe associé au jeu.*

La solution plus connue d'un jeu est celle de l'équilibre de Nash, dont chaque joueur choisit une stratégie telle que tous les autres joueurs maximisent leur utilité unilatéralement. Formallement, un équilibre de Nash est une tuple de stratégies $(\overline{s}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ tel que pour tout joueur $i \in \mathcal{I}$ et toutes autres stratégies $(s_i)_{i \in \mathcal{I}}$ nous avons $u_i(\overline{s}) \geq u_i(s_i, \overline{s}_{-i})$. Le prochain résultat nous permet d'identifier les réalisations des équilibres de Nash sur le graphe.

Théorème 2 *Dans un jeu $\Gamma = \langle \mathcal{I}, H, u \rangle$ une réalisation $h \in H$ est produite par un équilibre de Nash si et seulement s'il existe deux ensembles $V_1 \subset H$ et $V_2 \subset H$ qui forment une clique maximale et un stable maximale, tels que $V_1 \cap X_2^h = \emptyset$ et $V_2 \cap X_1^h = \emptyset$, où $X_1^h = \{h' \in H : u_1(h') > u_1(h)\}$ et $X_2^h = \{h' \in H : u_2(h') > u_2(h)\}$.*

Grâce à ce résultat, nous proposons une nouvelle classe d'algorithmes pour les jeux extensifs. En particulier, nous ramenons la recherche des équilibres de Nash dans un jeu extensif à un problème de clique maximale dans le graphe induit par les réalisations du jeu. Par exemple, il est possible de determiner les bornes des utilités des joueurs dans un équilibre de Nash, comment montré dans [1] pour le cas des *timing games*.

Références

[1] Paolo Zappalà, Amal Benhamiche, Matthieu Chardy, Francesco De Pellegrini, Rosa Figueiredo. A timing game approach for the roll-out of new mobile technologies. *2022 20th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad hoc, and Wireless Networks (WiOpt)*, 217–224, 2022.