Degreewidth : un nouveau paramètre pour résoudre des problèmes dans les tournois

Tom Davot[1], Lucas Isenmann[2], Sanjukta Roy[3], Jocelyn Thiebaut[3]

[1] Université de Technologie de Compiègne, CNRS, Heudiasyc, Compiègne, France
`tom.davot@hds.utc.fr`

[2] Université Paul Valéry, Montpellier III, Montpellier, France
`lucas.isenmann@laposte.net`

[3] Faculty of Information Technology, Czech Technical University in Prague, Prague, Czech Republic
`{sanjukta.roy,jocelyn.thiebaut}@fit.cvut.cz`

Mots-clés : *Tournois, NP-difficulté, nouveau paramètre, feedback vertex set, approximation.*

1 Introduction

Un tournoi T est un graphe dirigé simple tel qu'il existe exactement un arc entre chaque paire de sommets. Il s'agit d'une classe de graphes qui a été très étudiée à la fois d'un point de vue structurel ou algorithmique [1]. Contrairement aux graphes complets, un certain nombre de problèmes restent difficiles dans les tournois et sont donc intéressants à étudier. Ces problèmes incluent Dominating Set ou FeedBack Arc Set. Toutefois, on peut remarquer que ces problèmes deviennent faciles à résoudre si le tournoi est acyclique (*i.e.* sans cycle dirigé). Une question naturelle qui survient est de savoir si ces problèmes sont faciles à résoudre si le tournoi est proche d'un tournoi acyclique. Dans la littérature, on peut trouver différents paramètres permettant de mesurer à quel point le tournoi est proche d'un tournoi acyclique [2]. Dans ce but, nous proposons un nouveau paramètre appelé degreewidth.

2 Notations et définitions

Soit T un tournoi. Un tournoi est dit *régulier* si pour chaque sommet, le degré entrant est égal au degré sortant. Dans ce qui suit, nous associons aux sommets de T un ordre total strict $\prec_\sigma$. Cela revient à définir une séquence des sommets $\sigma := \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ telle que $v_i \prec_\sigma v_j$ si et seulement si $i < j$. Un arc (v_i, v_j) est un *arc retour* de σ si $v_j \prec_\sigma v_i$, autrement il est appelé *arc avant*. Remarquons qu'un tournoi est acyclique si et seulement si il existe une séquence σ qui ne contient pas d'arc retour. Soit v un sommet de T, nous notons $d_\sigma(v)$ le nombre d'arcs retours incidents à v dans σ. Le *degreewidth* de σ, noté $\Delta_\sigma(T)$ est donné par $\max\{d_\sigma(v) \mid v \in V(T)\}$. Le paramètre que nous étudions dans ce résumé est défini de la façon suivante.

Définition 1 *Soit T un tournoi et soit $\Sigma(T)$ l'ensemble des séquences possibles pour les sommets de T. Le* degreewidth *de T, noté $\Delta(T)$ est défini par la formule $\Delta(T) := \min_{\sigma \in \Sigma(T)} \Delta_\sigma(T)$.*

Notons qu'un tournoi est acyclique si et seulement si il est de degreewidth zéro. Un tournoi est *sparse* s'il est de degreewidth un et dans ce cas, il existe une séquence des sommets σ telle que les arcs retours de σ forment un couplage, c'est-à-dire un ensemble d'arcs disjoints (voir la Figure 1). Nous pouvons observer que plus la valeur du degreewidth d'un tournoi est élevé, plus le tournoi contient de cycles.

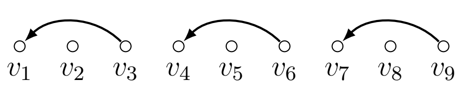

FIG. 1 – Exemple d'un tournoi sparse. La séquence donnée est $\sigma := \langle v_1, \ldots, v_9 \rangle$. Seuls les arcs retours sont dessinés.

3 Calcul du degreewidth

Nous présentons d'abord les résultats obtenus pour le calcul du degreewidth. Pour certaines classes de tournois, le calcul du degreewidth est possible en temps polynomial. C'est le cas des tournois réguliers et des tournois sparses.

Théorème 1 *Soit T un tournoi régulier d'ordre $2k+1$, nous avons $\Delta(T) = k$.*

Théorème 2 *Il est possible de déterminer si un tournoi de n sommets est sparse en $O(n^3)$.*

Cependant, nous pouvons montrer que dans le cas général il n'existe pas d'algorithme polynomial pour calculer la valeur de ce paramètre (sauf si $P = NP$). Ce résultat est obtenu à l'aide d'une réduction à partir du problème 3-SAT ÉQUILIBRÉ(4) qui est une variante de 3-SAT où chaque variable apparaît exactement deux fois positivement et deux fois négativement.

Théorème 3 *Déterminer le degreewidth d'un tournoi est NP-difficile.*

Du côté positif, nous avons montré qu'il est possible d'approximer le degreewidth avec un facteur d'approximation constant.

Théorème 4 *Ordonner les sommets par ordre croissant de leur degré sortant est une 3-approximation serrée pour le degreewidth d'un tournoi.*

4 Degreewidth comme un paramètre

Nous avons ensuite mis en évidence que le degreewidth pouvait être utilisé en tant que paramètre pour certains problèmes classiques. Ainsi, à l'aide d'un algorithme de color coding dérandomisé, nous pouvons montrer que c'est le cas pour ENSEMBLE DOMINANT.

Théorème 5 ENSEMBLE DOMINANT *paramétré par le degreewidth est FPT dans les tournois.*

Nous avons également regardé le problème FEEDBACK ARC SET où nous avons mis en évidence le résultat suivant.

Théorème 6 FEEDBACK ARC SET *est résoluble en temps $O(n^3)$ dans les tournois sparses de n sommets.*

Nous pensons que ce résultat est généralisable pour montrer que FEEDBACK ARC SET est FPT quand paramétré par le degreewidth. À l'opposé, nous avons montré qu'un problème similaire, FEEDBACK VERTEX SET, ne pouvait être paramétré par le degreewidth.

Théorème 7 FEEDBACK VERTEX SET *est NP-difficile dans les tournois sparses.*

5 Perspectives

Nous avons montré que calculer le degreewidth d'un graphe était NP-difficile mais qu'il était possible d'obtenir une 3-approximation en temps polynomial. Une extension naturelle de ce travail est de chercher s'il existe un PTAS pour calculer ce paramètre ou si au contraire il existe une borne d'inapproximation constante. Une autre perspective naturelle de travail est d'étudier d'autres problèmes dans les tournois pour voir s'ils peuvent être paramétrés par le degreewidth.

Références

[1] Jørgen Bang-Jensen and Gregory Z. Gutin. *Digraphs - Theory, Algorithms and Applications, Second Edition.* Springer Monographs in Mathematics. Springer, 2009.

[2] Frank Gurski and Carolin Rehs. Comparing linear width parameters for directed graphs. *Theory Comput. Syst.*, 63(6) :1358–1387, 2019.