Le matroïde No-meet

Walid Ben-Ameur[1] Natalia Kushik[1] Alessandro Maddaloni[1] José Neto[1]
Dimitri Watel[2]

[1] Lab. SAMOVAR, Télécom SudParis, Institut Polytechnique de Paris, 91120 Palaiseau, France
[2] Lab. SAMOVAR, ENSIIE, 91000, Evry, France

Mots-clés : *Matroïde, Complexité, Cycle, Orientation de graphe*

1 Présentation du problème étudié

On considère un graphe $G = (V, A)$ orienté. Ce graphe peut posséder des boucles et des arcs symétriques. Des jetons sont disposés dans le graphe, chacun sur un nœud distinct de V. Chaque jeton doit se déplacer dans ce graphe sans jamais rencontrer les autres. A chaque étape de déplacement, les jetons vont, de manière synchrone, choisir un arc sortant et suivre cet arc. Le déplacement est *valide* si, à l'issue de l'étape, chaque jeton est dans un nœud distinct. Nous définissons ainsi le problème de décision No-meet suivant : connaissant un graphe $G = (V, A)$ orienté et $S \subset V$, si on place un jeton dans chaque nœud de S, existe-t-il une suite infinie de déplacements valides pour ces jetons ? Dans le cas où la réponse est positive, on dit que S est *indépendant*. La figure 1 donne un exemple de cas positif et négatif.

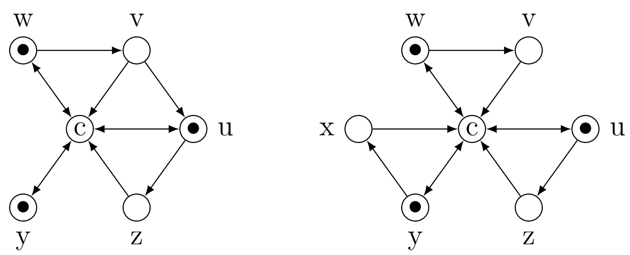

FIG. 1 – Exemples d'instances positive (à gauche) et négative (à droite). Les jetons sont représentés par les symboles •. A gauche, les jetons dans y, w et u vont respectivement en c, v et z. Ensuite, les jetons peuvent utilier le cycle (c, w, v, u, z) indéfiniment. A droite, au moins deux jetons seront dans c après 1 ou 2 déplacements.

Ce problème peut avoir des applications dans le cas où on cherche à déterminer des chemins permettant à des robots ou des personnes d'effectuer leurs tâches sans jamais se croiser. Il est intimement lié à la notion de ressources partagées et sa résolution permet de vérifier des conditions nécessaires ou suffisantes pour l'existence de séquences reconnaissables dans les automates et les machines à états finis. Des travaux connexes s'intéressent au problème inverse. [2] cherche à déterminer le temps minimum de rencontre entre deux véhicules dans un graphe. [1] s'intéresse au cas où les jetons se déplacent selon une marche aléatoire dans le graphe, et donne une borne supérieure du temps moyen de fusion de tous les jetons. Le problème No-meet est également proche du problème de *Cops and Robbers*[3]. Contrairement au cas de notre problème où les jetons coopèrent pour ne jamais se rencontrer, dans les problèmes de type Cops and Robbers, les jetons sont en compétition, une partie des jetons devant attraper les autres tandis que ces derniers doivent les fuir.

On note $N(G) = (V, I)$ la paire constituée des nœuds de G et de l'ensemble I des sous-ensembles indépendants de V. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à la caractérisation de $N(G)$.

2 Structure de $N(G)$ et complexité du problème No-meet

Théorème 2.1. *Pour tout graphe G, $N(G)$ est un matroïde.*

Théorème 2.2. *No-meet est polynomial, autrement dit, déterminer si un ensemble est indépendant est polynomial.*

Ces deux résultats utilisés conjointement impliquent qu'il est possible, en temps polynomial de trouver une base. Nous avons également réussi à caractériser la taille de ces ensembles.

Théorème 2.3. *La taille d'une base de $N(G)$ est la valeur maximum que l'on peut obtenir en additionnant les tailles de circuits nœuds-disjoints de G.*

Nous avons explicité des liens entre la classe des matroïdes No-meet avec des classes connues de matroïdes. Ces liens sont résumés dans la figure 2. En particulier nous avons montré que les mineurs [1] des matroïdes No-meet sont exactement la classe des Gammoides.

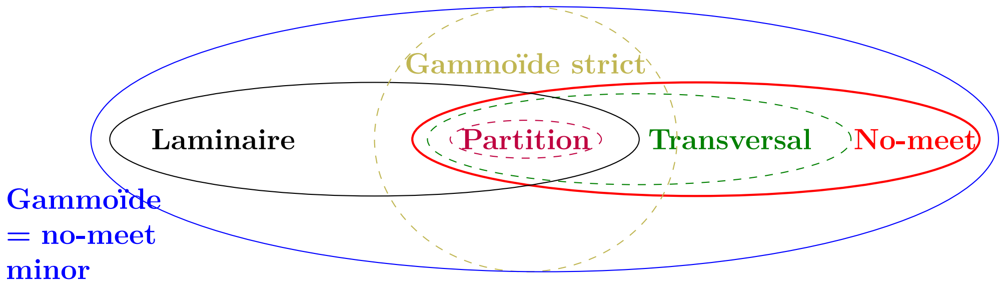

FIG. 2 – connexions entre la classe des matroïdes No-meet avec d'autres classes connues.

3 Orientation de graphes mixtes

Une extension, nommée *No-meet orientation* consiste, connaissant un graphe mixte $G = (V, E, A)$ avec des nœuds V, des arêtes E et des arcs A, et $S \subset V$ à déterminer s'il existe une orientation de E de sorte que S soit indépendant dans le graphe orienté correspondant.

Théorème 3.1. *No-meet orientation est NP-Complet.*

Soit $S \subset V$, *le rang de S* est la taille du plus grand sous-ensemble indépendant de S.

Théorème 3.2. *Connaissant un graphe mixte $G = (V, E, A)$ et $S \subset V$, déterminer une orientation de G maximisant le rang de S est NP-Difficile et, si P≠NP, il n'existe pas de PTAS pour ce problème.*

Théorème 3.3. *Si $|S| = 1$, maximiser ou minimiser le rang de S est polynomial.*

Savoir si No-meet orientation et l'optimisation du rang sont XP vis-à-vis de $|S|$ est ouvert.

Références

[1] Nader H. Bshouty, Lisa Higham, and Jolanta Warpechowska-Gruca. Meeting times of random walks on graphs. *Inf. Process. Lett.*, 69(5) :259–265, 1999.

[2] Anders Dessmark, Pierre Fraigniaud, Dariusz R. Kowalski, and Andrzej Pelc. Deterministic rendezvous in graphs. *Algorithmica*, 46(1) :69–96, 2006.

[3] Richard Nowakowski and Peter Winkler. Vertex-to-vertex pursuit in a graph. *Discrete Mathematics*, 43(2) :235–239, 1983.

1. Un mineur de $N(G) = (V, I)$ est un matroïde obtenu à partir d'une série de *restrictions* (suppression d'une partie V' de V, on conserve les indépendants inclus dans $V \backslash V'$) et de *contractions* (suppression d'une partie V' de V, les indépendants sont les sous-ensembles de $V \backslash V'$ dont au moins une union avec un sous-ensemble indépendant maximum de V' est dans I).