La mesure du pouvoir de vote avec des délégations

Rachael Colley[1], Théo Delemazure[2], Hugo Gilbert[2]

[1] IRIT-CNRS, Université de Toulouse, Toulouse, France
rachael.colley@irit.fr

[2] Université Paris-Dauphine, Université PSL, CNRS, LAMSADE, 75016 Paris, France
{theo.delemazure,hugo.gilbert}@lamsade.dauphine.fr

Mots-clés : *jeu de vote, vote par procuration, démocratie liquide, indice de pouvoir.*

1 Introduction

Les jeux de vote ont été largement utilisés pour étudier le pouvoir de vote a priori des électeurs participant à une élection [4]. Le pouvoir de vote a priori désigne le pouvoir conféré uniquement par les règles régissant le processus électoral ; on ne considérera par exemple pas la nature du projet de loi débattu ou les affinités éventuelles entre les votants. Pour mesurer le pouvoir de vote d'un électeur, on peut s'intéresser à la probabilité que ce dernier influence le résultat de l'élection. Plusieurs mesures de pouvoir ont été conçues pour "mesurer" cette probabilité ; la plus connue étant celle de Penrose-Banzhaf dans les jeux simples [1, 9].

Dans un jeu simple, une assemblée d'électeurs doit prendre une décision collective sur une proposition, et chaque électeur peut soit soutenir soit s'opposer à la proposition. On peut alors présenter la mesure de pouvoir de Penrose-Banzhaf de la manière suivante : les votants votent indépendamment les uns des autres, et la probabilité qu'un votant soutienne la proposition est la même que la probabilité qu'il s'y oppose. On mesure alors la probabilité que le vote de l'électeur puisse déterminer l'issue de l'élection étant donné ce modèle probabiliste.

Les jeux simples ont été étendus de diverses manières afin de prendre en compte des cadres plus réalistes, plus divers, et plus complexes : par exemple pour prendre en compte le fait que certains électeurs peuvent s'abstenir de voter [5], qu'il peut y avoir plusieurs niveaux d'approbation [6], ou bien encore que certains électeurs forment des coalitions [8]. Ainsi, de nouvelles mesures de pouvoir ont été conçues afin d'analyser la criticité des votants dans ces cadres particuliers. Cependant, des cadres permettant à chaque électeur de déléguer son vote comme ceux de la démocratie liquide [2, 3] et du vote par procuration [7, 11] ont pour l'instant été peu étudiés sous cet angle.

2 Mesures de pouvoir et délégations

Dans cette communication, nous étendons les jeux simples afin de considérer un cadre dans lequel les électeurs peuvent déléguer leurs voix. Ce cadre nous amène à étudier des partitions de l'électorat que nous nommons des *délégation-partitions.*

Définition 1 *Une* délégation-partition *d'un ensemble V de votants est une fonction $D : V \to \{-1, 1\} \cup V$ telle que $\forall v \in V$, $D(v) \neq v$. On notera D^-, D^+, et D^v les images inverses de $\{-1\}$, $\{1\}$ et $\{v\}$ pour chaque $v \in V$ par D.*

Nous étudions trois cadres distincts, celui de la Démocratie Liquide, noté DL, et deux variantes du vote par procuration, notés VP_α et VP_β. Dans le cas du vote par procuration, l'ensemble V est composé d'un ensemble V_v de délégataires et d'un ensemble $V_d = V \setminus V_v$ de délégants. Si toutes les délégation-partitions sont admissibles dans le cadre DL, ce n'est pas le cas pour le vote par procuration. Ainsi, dans le cadre VP_α (resp. VP_β), nous devons avoir $D(v) \in \{-1, 1\}$ si $v \in V_v$ et $D(v) \in V_v$ (resp. $D(v) \in V_v \cup \{-1, 1\}$) si $v \in V_d$.

Nous concevons et étudions de nouvelles mesures de pouvoir de vote a priori dans ces trois cadres. Nos mesures de pouvoir sont similaires dans leurs intuitions à celle de Penrose-Banzhaf, et peuvent être présentées de la manière suivante. Nous supposons un modèle probabiliste dans lequel toutes les délégation-partitions admissibles sont équiprobables. Cela revient à supposer que chaque électeur choisit une action admissible indépendamment des autres électeurs et uniformément au hasard. On mesure alors la probabilité que le vote ou la délégation de l'électeur puisse déterminer l'issue de l'élection étant donné ce modèle probabiliste.

Pendant cette communication, nous montrerons que ces nouvelles mesures étendent celle de Penrose-Banzhaf pour les jeux simples. Ainsi, calculer la mesure de pouvoir d'un électeur est un problème #P-difficile dans les jeux de vote pondérés [10]. Cependant, nous présenterons des formules récursives permettant de réaliser ce calcul en temps pseudo-polynomial dans les jeux de vote pondérés et nous expliquerons que ces mesures de pouvoir de vote peuvent être approximées par échantillonage. Enfin, des tests numériques illustreront comment ces mesures évoluent en fonction des paramètres du jeu de vote considéré et comment le pouvoir d'un électeur change quand on rajoute la possibilité de déléguer sa voix.

Références

[1] John F Banzhaf III. Weighted voting doesn't work : A mathematical analysis. *Rutgers L. Rev.*, 19 :317, 1964.

[2] J. Behrens, A. Kistner, A. Nitsche, and B. Swierczek. *The principles of LiquidFeedback*. Interacktive Demokratie, Berlin, 2014.

[3] Markus Brill. Interactive democracy. In *Proceedings of the 17th International Conference on Autonomous Agents and MultiAgent Systems, AAMAS 2018, Stockholm, Sweden, July 10-15, 2018*, pages 1183–1187, 2018.

[4] Dan S Felsenthal, Moshé Machover, et al. The measurement of voting power. *Books*, 1998.

[5] Josep Freixas. Probabilistic power indices for voting rules with abstention. *Mathematical Social Sciences*, 64(1) :89–99, 2012.

[6] Josep Freixas and William S Zwicker. Weighted voting, abstention, and multiple levels of approval. *Social choice and welfare*, 21(3) :399–431, 2003.

[7] James C Miller. A program for direct and proxy voting in the legislative process. *Public choice*, 7(1) :107–113, 1969.

[8] Guillermo Owen. Modification of the banzhaf-coleman index for games with a priori unions. In *Power, voting, and voting power*, pages 232–238. Springer, 1981.

[9] Lionel S Penrose. The elementary statistics of majority voting. *Journal of the Royal Statistical Society*, 109(1) :53–57, 1946.

[10] Kislaya Prasad and Jerry S Kelly. Np-completeness of some problems concerning voting games. *International Journal of Game Theory*, 19(1) :1–9, 1990.

[11] Gordon Tullock. Computerizing politics. *Mathematical and Computer Modelling*, 16(8-9) :59–65, 1992.