Optimisation de différentes *Conditional Value at Risk* dans le cas de variables aléatoires discrètes et application au plus court chemin sous incertitudes

Alain Faye[1], Harry Ung[1]
[1] ENSIIE-CEDRIC, France
{alain.faye,harry.ung}@ensiie.fr

Mots-clés : *Conditional Value at Risk, plus court chemin sous incertitudes, moyenne ordonnée.*

1 Introduction

La *Value at Risk* (VaR) et les *Conditional Values at Risk* (CVaR) sont des mesures courantes pour évaluer le risque dans le domaine financier notamment. Les définitions de la VaR et des différentes CVaR [1] sont rappelées ci-dessous :
Soit F la fonction de répartition d'une v.a. X : $F(z) = Proba(X \leq z)$

- *Value at Risk* de niveau de confiance $0<\alpha<1$: $VaR_\alpha(X) = \min\{z: F(z) \geq \alpha\}$
- *Upper* CVaR est la moyenne de X sachant que X est strictement supérieure à sa *Value at Risk*

$$CVaR_\alpha^+(X) = E(X|X > VaR_\alpha(X))$$

- *Lower* CVaR est la moyenne de X sachant que X est supérieure ou égale à sa *Value at Risk*

$$CVaR_\alpha^-(X) = E(X|X \geq VaR_\alpha(X))$$

- CVaR est la moyenne de VaR et CVaR$^+$ pondérée avec $\lambda_\alpha(X) = \frac{F(VaR_\alpha(X))-\alpha}{1-\alpha}$

$$CVaR_\alpha(X) = \lambda_\alpha(X) VaR_\alpha(X) + \big(1 - \lambda_\alpha(X)\big) CVaR_\alpha^+(X)$$

Rockafellar et Uryasef [2] ont montré que :

$$CVaR_\alpha(X) = \min_C \left\{C + \frac{1}{1-\alpha} E([X - C]^+)\right\} \qquad \text{(RU)}$$

Avec $[t]^+ = \max\{0, t\}$. A noter que $VaR_\alpha(X)$ fait partie des solutions optimales de (RU) [2].

2 Moyenne ordonnée pour calculer les différentes *Conditional Value at Risk*

Soit une fonction de coût $f(x, Y)$ qui dépend d'un vecteur de décision $x \in S$ et d'un vecteur aléatoire Y. On suppose que le vecteur aléatoire Y suit une loi discrète définie par N scenarios équiprobables issus par exemple de N observations. Pour x fixé, $f(x, Y)$ est une variable aléatoire discrète prenant N valeurs de façon équiprobable : $f_i(x) = f(x, y_i)$ pour $i = 1, \dots, N$.

Le problème est, pour un niveau de confiance $0 < \alpha < 1$ fixé, de minimiser sur $x \in S$ les différentes CVaR de la v.a. $X(x) = f(x, Y)$.

Nous proposons le calcul de la *lower* CVaR et de la CVaR via le calcul de moyennes ordonnées. Pour x fixé, on ordonne les $f_i(x)$ par ordre croissant, (i) désignant l'indice en position i dans la liste triée :

$$f_{(1)}(x) \leq f_{(2)}(x) \leq \cdots \leq f_{(N)}(x)$$

La moyenne ordonnée est définie via les poids $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_N$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_N = 1$. La moyenne ordonnée est :

$$OWA(x) = \lambda_1 f_{(1)}(x) + \lambda_2 f_{(2)}(x) + \cdots + \lambda_N f_{(N)}(x)$$

Cependant, pour minimiser la moyenne ordonnée sur x, la difficulté est que l'ordre des $f_i(x)$ varie quand x change. Pour x fixé, nous donnons les poids λ_i $i = 1, \dots, N$ qui permettent d'obtenir la *lower* CVaR et la CVaR de $X(x)$. Nous proposons par ailleurs deux programmes mathématiques qui permettent de minimiser $OWA(x)$ sur x et ainsi de calculer la *lower* CVaR et la CVaR minimums.

3 Plus court chemin sous incertitudes

Nous considérons le problème de plus court chemin d'un sommet *source* à un sommet *puits* soumis à des incertitudes sur les poids des arcs. Les poids des arcs sont aléatoires et suivent une loi discrète de N scenarios équiprobables provenant de N observations. Nous cherchons un chemin de CVaR minimum. La complexité du problème est d'abord étudiée. Il s'avère que trouver le chemin de CVaR minimale est un problème NP-difficile dès que N=2 scenarios et ce, même si la *Value at Risk* i.e. la solution C de (RU) est connue. Puis nous testons numériquement le problème. La base de tests utilisée est disponible sur le lien https://github.com/bstabler/TransportationNetworks. Les poids des arcs sont perturbés selon une loi exponentielle qui simule les N observations. Les tests numériques comparent différentes méthodes de calcul de la CVaR. Quatre méthodes sont testées, deux basées sur la formulation originelle de Rockafellar et Uryasev [2] et deux basées sur la moyenne ordonnée OWA.

Les tests portent sur des graphes comportant jusqu'à 975 sommets pour une densité d'arcs comprise entre 0,23% et 41,6%. Les tests montrent que la méthode la plus rapide dépend du nombre N d'observations. Une des deux méthodes basées sur OWA est généralement la plus rapide pour $N>10^2$, 10^3 avec, par exemple, un gain de temps entre 5% et 90% pour N=5000. (cf. [3] pour plus de détail).

Références

[1] Sergey Sarykalin, Gaia Serraino and Stan Uryasev . Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk in Risk Management and Optimization. pages 270-294 *INFORMS 2008*. doi 10.1287/educ.1080.0052

[2] R. Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. *Journal of Banking & Finance*, volume 26, pages 1443-1471 (2002)

[3] Harry Ung. Internship report (2022). https://gitlab.pedago.ensiie.fr/harry.ung/CVaR/