Dominant minimum dans les graphes sans griffe de diamètre d

Valentin Bouquet[1], Christophe Picouleau[1]

Conservatoire National des Arts et Métiers, laboratoire Cédric Paris (France) :
valentin.bouquet@cnam.fr,christophe.picouleau@cnam.fr

Mots-clés : *dominant minimum, couplage maximal, algorithme polynomial, NP-complet.*

Après avoir montré que le problème du dominant minimum d'un graphe sans griffe est NP-difficile pour les graphes de diamètre fixé $d, d \geq 3$, nous montrons un algorithme polynomial pour les graphes de diamètre deux.

1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non orienté. Un ensemble de sommets $D \subseteq V$ est un dominant de G si et seulement si pour tout sommet $v \in V \setminus D$, v a un voisin dans D. Un ensemble dominant minimum, est un ensemble dominant de cardinalité minimale. On note $\gamma(G)$ la cardinalité d'un ensemble dominant minimum. Le diamètre de G est la longueur maximale (nombre d'arêtes) d'un plus court chemin entre toute paire de sommets. G est sans griffe s'il ne contient pas d'étoile à trois feuilles comme sous-graphe induit.

Nous déterminons la complexité algorithmique de la version décision du problème du dominant minimum pour les graphes sans griffe de diamètre fixé d.

2 Complexité lorsque $d \geq 3$

En utilisant une transformation polynomiale du problème du dominant minimum pour les graphes cubiques nous montrons :

Théorème 1 *Pour tout entier $d \geq 3$, le problème du dominant minimum est NP-complet pour les graphes sans griffe de diamètre d.*

3 Complexité lorsque $d \leq 2$

Les graphes G de diamètre 1 étant des cliques nous avons trivialement $\gamma(G) = 1$.

Lorsque le diamètre de G est 2 nous montrons le résultat suivant :

Théorème 2 *Le problème du dominant minimum est polynomial pour les graphes sans griffe de diamètre* 2.

Pour obtenir ce résultat nous montrons que :

Théorème 3 *Le problème consistant à calculer un couplage maximal de cardinalité minimale est polynomial pour la classe des graphes sans $2K_2$.*

Les ingrédients de la preuve consistent, d'une part, en un résultat structurel liant les couplages maximaux et les ensembles stables des graphes sans $2K_2$ et d'autre part, un résultat algorithmique prouvé par Dhanalakshmi et al. dans [1] concernant l'énumération des ensembles stable maximaux pour les graphes sans $2K_2$.

Le Théorème 2 est obtenu à partir du Théorème 3 via un passage au *line graph.*

4 Une dichotomie

À partir des résultats précédants nous obtenons la dichotomie suivante :

Théorème 4 *Soient d un entier positif et G un graphe sans griffe de diamètre d. Décider si $\gamma(G) \leq d$ est un problème NP-complet pour $d \geq 3$, polynomial pour $d \leq 2$.*

Références

[1] S. Dhanalakshmi, N. Sadagopan and V. Manogna (2016), *On $2K_2$-free graphs*, International Journal of Pure and Applied Mathematics 109 (7), 167-173.