Modèle de ruine et risque de pénurie en eau douce

Atik Touazi[1], Djamil Aissani[2]

[1] Faculté des Sciences, Université d'Alger1, Algérie
a.touazi@univ-alger.dz
[2] Unité de Recherche LaMOS, Université de Béjaia, Algérie
lamos_bejaia@hotmail.com

Mots-clés : *Modèle de risque, Probabilité de ruine, Simulation.*

1 Introduction

Les modèles de ruine sont des modèles dynamiques en général à temps continu qui décrivent l'évolution d'un « stock » avec entrées et sorties et sont donc de ce point de vue très proches des modèles de files d'attente [5]. Les applications de la théorie de risque sont nombreuses et présentes dans de nombreux domaines tels que les assurances [1, 6], le risque alimentaire [2], le trafic routier[4] ou encore la finance [3]. Dans le cadre des assurances, le but est de modéliser l'évolution des réserves d'une compagnie d'assurances en fonction de sa réserve initiale. Dans le cadre des risques de pénurie en eau douce, le modèle est renversé mais son principe reste identique.

En effet, on cherche à modéliser l'évolution du niveau de réserve, en prenant en compte la réserve initiale, les sinistres - ici les précipitations - et les phénomènes de consommation (l'opposé des primes si l'on veut faire le parallèle avec les assurances). Le concept de ruine doit alors se comprendre comme la survenance d'un scénario défavorable, pouvant conduire à l'impossibilité, pour la compagnie, de faire face à certains de ses engagements. En termes de risque de pénurie en eau douce la ruine interviendra lorsque le niveau de réserve est au-dessous d'un certain seuil.

2 Description du Modèle de risque

Sur une région donnée, nous avons les interprétations suivantes :

— $\{A_n, n \geq 1\}$ est le processus des inter-arrivées des précipitations .

— $\{B_n, n \geq 1\}$ est le processus des quantités successifs d'eau de pluies récupérée.

— Nous supposons que le taux de consommation d'eau douce est contant c $(c > 0)$.

Associons au modèle de risque considéré les processus stochastiques suivants :

$$\{R_n, n \geq 1\}, \text{ avec } \quad R_n = cA_n - B_n, \quad n \geq 1\,;$$
$$\{S_n, n \geq 0\}, \text{ avec } \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} R_k, \quad n \geq 0, \quad S_0 = 0\,;$$

En utilisant les processus suivant :

— $\{N(t), t \geq 0\}$ où $N(t)$ est le nombre total de précipitation dans l'intervalle [0,t].

— $\{Z(t), t \geq 0\}$ avec $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$ représente la quantité cumulée d'eau récupérée.

— $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$est une suite de variable aléatoire indépendante et identiquement distribuées où Z_i est la quantité d'eau récupérée lors de la $i^{ème}$ précipitation.

— $\{X(t), t > 0\}$ où $X(t)$ représente le niveau de réserve en eau douce à l'instant t,

le processus de réserve est défini comme suit :

$$X(t) = u - ct + Z(t). \tag{1}$$

3 Simulation

Algorithm 1 Simulation du processus $X(t)$

1.Introduire les paramètres gouvernant le modèle :
- Le niveau initial de réserve d'eau u ;
- La loi de probabilité des inter-arrivées des précipitations ;
- La loi de probabilité des quantités d'eau récupérée lors des précipitations ;
- Le taux de consommation c ;
- Le temps de simulation.

2. Initialiser le temps à zéro ;

3.Vérifier si le temps de simulation est atteint :
- Si oui, arrêter ;
- Sinon, générer une valeur du temps et calculer la date t de la prochaine précipitation. Puis, aller à 4 ;

4.Générer une valeur de la quantité d'eau ;

5. Calculer le niveau de réserve en eau à la date t ;

6. Retour à 3.

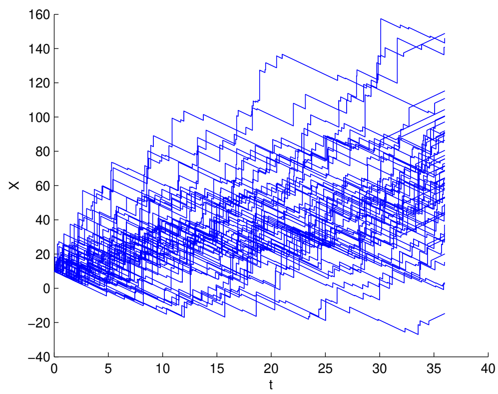

FIG. 1 – Différents scénarios possibles de $X(t)$.

4 Conclusions et perspectives

Pour estimer la probabilité de pénurie en eau douce, il faut simuler n (n très grand) répétitions indépendantes du processus $X(t)$ jusqu'à ce que la ruine se produise. Dans chaque répétition nous arrêtons le test à T. Dans le cas où la ruine se produit avant T, nous arrêtons le test à l'instant de la ruine. Soit p l'estimateur de cette probabilité. Nous prenons le rapport $p = \frac{n^{'}}{n}$ où $n^{'}$ est le nombre de fois où la ruine s'est produite avant l'instant T , par rapport au nombre total n.

Références

[1] Asmussen, S. , Albrecher, H. : Ruin probabilities, Advanced Series on Statistical Science Applied Probability. World Scientific, New Jersey (2010).

[2] Bertail, P. , Clémençon, S. , Tressou, J. : Statistical analysis of a dynamic model for food contaminant exposure with applications to dietary methylmercury contamination. Journal of Biological Dynamics, **4**, 212-234 (2010).

[3] BRICK, C.R., SEKKAK, S.Y. , Touazi, A., Aissani, D. : Estimation du risque de liquidité bancaire : Approche par la théorie de ruine, Colloque International MOAD'2022, Béjaia, Algérie. Novembre 2022.

[4] Mouhous, F. , Aissani, D. and Farhi, N. : A stochastic risk model for incident occurrences and duration in road networks. Journal of Transportmetrica A : Transport Science, 1-33 (2022).

[5] Touazi, A., Benouaret, Z. , Aissani, D. and Adjabi, S. : Sur l'équivalence entre la théorie de risque et la théorie de files d'attente , Actes du 11ème congrès international QUALITA'2015, Nancy, France, 188-192 (2015).

[6] Touazi, A., Benouaret, Z. , Aissani, D. and Adjabi, S. : Nonparametric estimation of the claim amount in the strong stability analysis of the classical risk model, Insurance : Mathematics and Economics **74**, 78-83 (2017).