

# Une résolution exacte du Pollution Routing Problem continu à l'aide d'un algorithme de Branch-and-Price

Théo Le Brun, Sandra Ulrich Ngueveu

LAAS-CNRS, Université de Toulouse, CNRS, INP, Toulouse, France

{tlebrun, ngueveu}@laas.fr

**Mots-clés** : *optimisation, logistique, tournée de véhicules, pollution, MINLP*

## 1 Introduction

Les problèmes de tournées de véhicule pour livrer des biens à des clients sont largement étudiés depuis plus d'une soixantaine d'année, et de nombreuses variantes ont émergé. Parmi elles, se trouve le *Pollution Routing Problem (PRP)*, introduit en 2011 par Bektas et Laporte [1], dont l'objectif s'intègre parfaitement aux enjeux actuels de réduction des émissions polluantes et de gaz à effet de serre. En effet, le *PRP* vise à minimiser les coûts opérationnels de la livraison, qui prennent en compte le salaire des chauffeurs, mais aussi les émissions générées par les véhicules le long de leur parcours. Ces dernières sont calculées sur chaque segment emprunté, et dépendent de la distance et pente moyenne du dit-segment emprunté, des caractéristiques techniques du véhicule, de sa charge courante et de sa vitesse.

Pour obtenir une solution valide du *PRP*, chaque client doit recevoir sa demande au sein d'une fenêtre de temps qui lui est propre, de la part d'un des véhicules, qui doivent, chacun, ne pas dépasser la capacité d'emport et respecter les limitations de vitesse imposées sur chaque arc, tout en partant et revenant à un unique dépôt.

## 2 Un problème souvent simplifié ou approximé

Les non-linéarités du problème, à la fois dans les contraintes et la fonction objectif, poussent souvent les méthodes de la littérature à discrétiser les vitesses des véhicules, comme proposé par Bektas et Laporte en 2011 [1], permettant ainsi de simplifier le *Mixed-Integer Non-Linear Problem* initial en un *Mixed-Integer Linear Problem*. De nombreuses approches heuristiques ont également été proposées, à l'image de celle de Kramer et al. (2015) [2].

A notre connaissance, seules 2 approches résolvent de manière exacte une version continue du *PRP*, et ce à une précision prédéfinie près. Tout d'abord, celle de Xiao et al. (2020) [3] s'appuie sur les propriétés de convexité des termes non-linéaires. Cela permet d'approximer par excès ces termes à l'aide de fonctions linéaires par morceaux à une précision  $\epsilon$  % près, assurant ainsi le respect des contraintes initialement non-linéaires, et l'obtention d'une valeur de fonction objectif garantie à  $3\epsilon$  % près. La seconde approche, proposée par Manerba et al. (2019) [4], s'affranchit de cette hypothèse de convexité, et restreint les non-linéarités à la fonction objectif à l'aide d'une reformulation exacte, puis

fait appel au Package LinA disponible sous Julia [5] afin d’obtenir une approximation linéaire par morceaux de la fonction objectif.

### 3 Notre approche et contribution

La présente approche propose de résoudre exactement et sans approximation (autres que les approximations numériques) la version originellement continue du *Pollution Routing Problem*. Pour cela, un algorithme de *Branch and Price* a été développé. Le Problème Maître (PM) de la génération de colonne correspond à un problème de *set-partitioning* classique, consistant à sélectionner les meilleures tournées faisables parmi un sous-ensemble disponible, chaque colonne étant associée à son coût non-linéaire. Le Sous-Problème (SP) repose sur la formulation proposée par Manerba et al. [4], et une minoration linéaire par morceaux de la fonction objectif, à une erreur prédéfinie près. En définitive, le SP se rapporte à un problème de plus court chemin sous contraintes de ressources et avec coûts linéaires par morceaux. Un algorithme spécifique de *labeling* a été développé pour résoudre ce problème, où chaque label se retrouve donc avec une fonction coût linéaire par morceaux, dépendante de l’heure de début de service au client courant. Les coûts linéaires par morceaux étant une minoration des coûts non-linéaires, il est garanti que le SP n’oublie aucune colonne qui aurait un coût réduit non-linéaire négatif. Finalement, les coûts non-linéaires réels des colonnes sont recalculés à partir des séquences de visite des clients avant qu’elles ne soient ajoutées au PM. Ainsi, le *Branch and Price* proposé résout bien exactement la version continue du *PRP*.

Néanmoins, la manipulation de fonctions linéaires par morceaux s’avérant chronophage, la génération de colonne peut ne pas être efficace. C’est pourquoi la présente méthode nécessite de partir de solutions de bonne qualité et de converger vers la solution optimale. Les résultats numériques préliminaires seront présentés lors de la conférence.

**Crédits** : Ces travaux de recherche sont soutenus par la chaire de formation et de recherche “Retail Responsable” portée par Toulouse INP (Titulaire = Sandra U. Ngueveu) associée au CNRS et à OneStock.

### Références

- [1] Tolga Bektas and Gilbert Laporte. *The Pollution Routing Problem. Transportation Research Part B : Methodological*, 45(8) :1232-1250, 2011.
- [2] Raphael Kramer, Anand Subramanian, Thibault Vidal and Lucídio dos Anjos F. Cabral. *A matheuristic approach for the Pollution-Routing Problem. European Journal of Operational Research*, 243(2) :523-539, 2015.
- [3] Yiyong Xiao, Xiaorong Zuo, Jiaoying Huang, Abdullah Konak and Yuchun Xu. *The continuous pollution routing problem. Applied Mathematics and Computation*, 387 :125072, 2020.
- [4] Daniele Manerba, Renata Mansini, Roberto Zanotti and Sandra Ulrich Ngueveu. *Pollution Routing Problem : A Piecewise-Linear Approximation approach. Optimization and Decision Science 2020, Book of Abstracts*, 28, 2019.
- [5] Julien Codsi, Sandra Ulrich Ngueveu and Bernard Gendron. *LinA : A faster approach to piecewise linear approximations using corridors and its application to mixed-integer optimization. LAAS report n° 21221, hal-03336003*, 2021.