Nombre de bondage des graphes triangulés

Valentin Bouquet[1]

Conservatoire National des Arts et Métiers, CEDRIC, Paris (France) : valentin.bouquet@cnam.fr

Mots-clés : *graphe, domination, suppression d'arêtes, nombre de bondage*

Soit $G = (S, A)$ un graphe connexe simple et non orienté. Un ensemble de sommets $S \subseteq V$ est un *dominant* de G si pour tout sommet $v \in V$, $N[v] \cap S \neq \emptyset$. Un ensemble *dominant minimum* est un ensemble dominant de cardinalité minimale. La cardinalité d'un tel ensemble dominant est appelé *nombre de domination* et est noté $\gamma(G)$.

Nous sommes intéressés par le problème suivant : étant donné un graphe $G = (S, A)$, existe-t-il une arête $a \in A$ telle que sa suppression du graphe fait varier son nombre de domination ? Comme un dominant de $G - a$ est aussi un dominant de G, nous en déduisons que le retrait d'une arête (ou d'un ensemble d'arêtes) ne diminue pas le nombre de domination. Par contre, le retrait d'une arête peut augmenter le nombre de domination puisque c'est le cas pour l'unique arête de la clique à deux sommets. Cette propriété n'est pas toujours vraie puisque le triangle ne possède pas d'arête dont le retrait fait augmenter le nombre de domination. Dans ce cas, on pourrait reformuler la question comme suit : existe-t-il un sous-ensemble d'arêtes A dont la suppression du graphe fait varier son nombre de domination ? Si le graphe est connexe, alors la réponse à cette question est toujours positive puisqu'il suffit de supprimer l'ensemble des arêtes du graphe. On peut donc chercher à restreindre la taille de cet ensemble afin qu'il soit minimum. Pour cela, J. Fink et al. [2] ont introduit le *nombre de bondage*. Le nombre de bondage $b(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum d'arêtes dont la suppression dans G augmente le nombre de domination, *i.e.* $A' \subseteq A$ tel que $\gamma(G - A') = \gamma(G) + 1$. Le nombre de bondage est donc une mesure de criticité du graphe relativement au nombre de domination, où le cas le plus critique est celui où $b(G) = 1$.

Une première motivation de l'étude du nombre de bondage porte sur la détermination de ses valeurs maximums. Prenons un graphe $G = (S, A)$ et supposons qu'il existe un sommet $s \in S$ tel que $\gamma(G - s) \geq \gamma(s)$. Soit $H = G - A_s$, où A_s est l'ensemble des arêtes incidentes à s dans G. Comme $H - s = G - s$ et que s est un sommet isolé de H, nous en déduisons que $\gamma(H) = \gamma(G - s) + 1 > \gamma(G)$. Donc pour les graphes G possédant un tel sommet, nous avons $b(G) \leq \Delta(G)$. De plus, Carlson et Develin [1] ont montré qu'il existait des graphes G pour lesquels $b(G) = \Delta(G)$. Mais qu'en est-il pour les graphes ne possédant pas un tel sommet ? Malheureusement, pour ces graphes appelés *γ-sommet-critique*, il n'est pas possible d'obtenir une borne triviale comme précédemment sur le nombre de bondage en fonction du degré maximum. Nous aimerions tout de même savoir à quel point cette borne sur le nombre de bondage diverge quand le graphe est γ-sommet-critique. Teschner [5] a montré qu'il n'existait pas de constante fixée c telle que $b(G) \leq \Delta(G) + c$ si G est γ-sommet-critique, et Teschner a aussi montré dans [4], que pour tout graphe $G = K_n \,\square\, K_n$ issu du produit cartésien de deux cliques K_n, K_n, $n \geq 3$, nous avons $b(G) = \frac{3}{2}\Delta(G)$. Encore aujourd'hui, nous ne savons pas si il existe des graphes avec un nombre de bondage plus grand, et ces graphes sont les seuls connus avec un nombre de bondage de $\frac{3}{2}\Delta(G)$.

Pour répondre à ces questions, les deux théorèmes suivants se sont révélés particulièrement utiles pour établir des bornes supérieures en fonction de l'intersection du voisinage de deux sommets.

Théorème 1 (Hartnell et Rall [3]) *Soit $G = (S, A)$ un graphe, et $st \in E$. Alors $b(G) \leq d(s) + d(t) - 1 - |N(s) \cap N(t)|$.*

Théorème 2 (Hartnell et Rall [3]) *Soit* $G = (S, A)$ *un graphe, et* $s, t \in V$ *tels que* $dist(s,t) \leq 2$. *Alors* $b(G) \leq d(s) + d(t) - 1$.

Ces deux théorèmes ont permis, entre autre, d'obtenir la borne supérieure suivante dans les arbres :

Théorème 3 (Fink et al. [2]) *Si* G *est un arbre, alors* $b(G) \leq 2$.

Comme les arbres sont les graphes sans cyles, il nous a semblé intéressant d'étudier les graphes pouvant posséder des cycles induits de longueur limitée par une constante. La plus petite classe est celle des graphes *triangulés* pour lesquels les cycles induits sont de longueurs au plus trois. Nous montrons la borne supérieure suivante pour le nombre de bondage des graphes triangulés :

Théorème 4 *Soit* G *un graphe triangulé. Si* G *est une clique, alors* $b(G) = \lceil \omega(G)/2 \rceil$. *Sinon* $b(G) \leq \omega(G) \leq \Delta(G)$.

Références

[1] K. Carlson and M. Develin, *On the bondage number of planar and directed graphs*, Discret. Math., 306 (8-9) (2006), 820-826.

[2] J.F. Fink, M.S. Jacobson, L.F. Kinch, and J. Roberts, *The bondage number of a graph*, Discret. Math., 86(1-3) (1990), 47-57.

[3] B. L. Hartnell and D. F. Rall, *Bounds on the bondage number of a graph*, Discret. Math., 128 (1-3) (1994), 173-177.

[4] U. Teschner, *A new upper bound for the bondage number of graphs with small domination number*, Ars. Comb., 12 (1995), 27-36.

[5] U. Teschner, *The bondage number of a graph G can be much greater than Delta(G)*, Ars. Comb., 43 (1996).