

Étude de formulations étendues pour le problème de l'arbre couvrant budgété

Charles Nourry¹, A. Ridha Mahjoub¹, Hassène Aissi¹

¹ Laboratoire LAMSADE, UMR CNRS 7024, Université Paris-Dauphine
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France

`charles.nourry@dauphine.psl.eu`

`{ridha.mahjoub,hassan.aissi}@lamsade.dauphine.fr`

Mots-clés : *optimisation combinatoire, approches polyédrales, formulation étendue, inégalité valide, théorie des graphes.*

1 Introduction

Le problème de l'arbre couvrant de poids minimum et le problème du sac à dos sont des problèmes très connus dans le domaine de la recherche opérationnelle. Considérons le problème à l'intersection de ces deux derniers ; celui de l'arbre couvrant budgété. Etant donné un graphe $G = (V, E)$ dans lequel chaque arête $e \in E$ est associé à un coût $c_e \in \mathbb{Q}$ et une consommation en ressource de $w_e \in \mathbb{Q}$ unités. On dispose également d'une quantité de ressource limitée à B unités, chaque solution de notre problème est un arbre couvrant T satisfaisant le contrainte de budget $\sum_{e \in E(T)} c_e \leq B$. Ce problème peut être retrouvé dans de nombreux cas pratiques, notamment dans le domaine de la télécommunication, mais également en tant que sous-problème dans certaines décompositions. Etant à l'intersection d'un problème polynomial et d'un problème faiblement NP-difficile, le problème de l'arbre budgété à été montré comme étant également NP-difficile par [1]. Plusieurs approches ont été utilisées pour résoudre ce problème, notamment des algorithmes d'approximations comme [3, 4]. Des cas particuliers de ce problème ont également été traités dans la littérature comme l'arbre couvrant avec des contraintes de degré sur chaque sommet. Nous abordons ce problème avec une approche basée sur la programmation mathématique. La contrainte de budget va modifier la structure des polyèdres plus ou moins connus associés aux différentes formulations du problème de l'arbre couvrant. L'objectif principal de notre travail est de comprendre ces nouvelles descriptions, trouver des formulations étendues et les exploiter pour trouver des inégalités valides et facettes afin de concevoir des algorithmes de branchements efficaces pour résoudre ce problème de réseau budgété.

2 Formulations étendues du problème

Le problème de l'arbre couvrant budgété est à l'intersection de deux problèmes qui se résolvent assez bien en pratique, surtout le problème de l'arbre couvrant. Cependant bien que ce dernier soit l'un des problèmes de conception de réseau les plus simples, l'ajout d'une contrainte de budget rend le problème assez long à résoudre en pratique, de plus certaines formulations qui semblent théoriquement intéressantes se retrouvent moins performantes que des formulations compactes et théoriquement peu pertinentes.

Afin de concevoir des algorithmes plus efficaces pour résoudre le problème de l'arbre couvrant budgété, plusieurs propriétés polyédrales du problème ont été étudiées ; cas particuliers, relaxation, inégalités valides et dimension du problème. Parmi les cas particuliers, on retrouve

celui basé sur le théorème d'intersection de deux matroïdes d'Edmonds. Dans le problème de l'arbre couvrant budgeté, on retrouve à chaque fois le matroïde graphique, dont les bases correspondent à l'ensemble des arbres couvrant du graphe, et donc dès lors que la contrainte de budget correspond également à un matroïde, le polyèdre de notre problème budgeté est entier. En partant de ce théorème, plusieurs formulations étendues ont été étudiées, une première formulation entière qui décrit parfaitement le problème mais de taille potentiellement exponentielle, exploitant le théorème d'intersection de matroïdes ainsi que des approches basées sur les travaux de Balas sur la programmation disjonctive [2]. Nous avons également étudié une autre formulation étendue de taille pseudo-polynomiale basée sur le théorème d'Edmonds et sur la programmation dynamique. Cette formulation est entière mais possède une fonction objectif quadratique, nécessitant plusieurs procédures après sa résolution pour retrouver une solution optimale réalisable pour le problème.

Ces formulations étendues ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients par rapport aux formulations existantes. L'étude des projections de ces différentes formulations étendues sur l'ensemble des variables de conception de réseaux permet de trouver des patterns d'inégalités valides pour le problème de l'arbre couvrant budgeté. En étudiant et exploitant les cônes de projections associés, plusieurs algorithmes permettant de générer des rayons et rayons extrêmes (et donc des inégalités valides) ont été donnés pour améliorer les temps de résolution du problème. Plusieurs tests ont été réalisés, avec des formulations compactes et de taille exponentielle afin de résoudre le problème le plus vite possible.

3 Conclusions et perspectives

L'étude de plusieurs formulations étendues nous a permis d'identifier différents patterns d'inégalités valides combinant la contrainte du sac à dos ainsi que la structure de l'arbre couvrant. Ces contraintes ont été intégrées dans des algorithmes de branchements afin de tester leurs efficacités dans la résolution du problème de l'arbre couvrant budgeté.

Références

- [1] Aggarwal, Vijay and Aneja, Yash P and Nair, KPK. *Minimal spanning tree subject to a side constraint*. Computers & Operations Research, 9(4) :287–296, 1982.
- [2] Balas, Egon. Disjunctive programming. *Annals of discrete mathematics*, 5 :3–51, 1979.
- [3] Ravi, R., Goemans, M. X. The constrained minimum spanning tree problem. *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory*, (pp. 66-75), 1996.
- [4] Hassin, R., Levin, A. An efficient polynomial time approximation scheme for the constrained minimum spanning tree problem using matroid intersection. *SIAM Journal on Computing*, 33(2), 261-268, 2004.