Répartition Équitable et Efficace d'un Budget Commun

Pierre Cardi[1], Laurent Gourvès[1], Julien Lesca[2]
[1] Université Paris-Dauphine, Université PSL, CNRS, LAMSADE, 75016
pierrecardi2@gmail.com
laurent.gourves@lamsade.dauphine.fr
[2] Huawei Technologies, Paris Research Center
julien.lesca@huawei.com

Mots-clés : *Choix social computationnel, Équité, Efficacité.*

BUDGET APPORTIONMENT est un problème de choix social computationnel impliquant un budget commun B et un ensemble de n agents. Chaque agent soumet un ensemble de demandes de financement à une autorité centrale qui décide lesquelles accepter. Supposons par exemple que Alice et Bob aient un budget $B = 100$, et des demandes $\{15, 41\}$ et $\{37, 85\}$, respectivement. Une solution est alors une sélection de demandes qui n'excède pas le budget, comme par exemple accepter la demande d'Alice valant 41, et celle de Bob valant 37. Chaque demande doit être entièrement acceptée ou rejetée. L'utilité d'un agent est définie comme la somme des demandes qui lui sont accordées. Introduit récemment dans [2], BUDGET APPORTIONMENT modélise des situations de la vie réelle. Par exemple, des informaticiens pourraient vouloir stocker des fichiers sur un disque commun (voir par exemple [3] pour un problème similaire). Dans ce cas, les demandes sont les fichiers à stocker avec leurs tailles, tandis que le budget correspond à la capacité du disque dur. Le modèle peut aussi être appliqué à une grande organisation (ex. union européenne) devant sélectionner les projets à financer [4].

L'enjeu pour l'autorité centrale est alors de déterminer une solution qui est à la fois équitable et efficace. Plusieurs notions d'équité comme la proportionnalité, l'absence d'envie (ici remplacée par une notion connexe dite d'absence de jalousie) peuvent être envisagées. Cependant, il est difficile de satisfaire ces critères tout en garantissant une bonne efficacité ; un compromis doit donc être trouvé. En ce sens, on utilise si besoin des notions relaxées d'équité et d'efficacité.

Modèle, critères et objectifs

Nous supposons connu un ensemble N de n agents partageant un budget $B \in \mathbb{N}$. Chaque agent $j \in N$ soumet un ensemble de demandes $D^j = \{d_1^j, \ldots, d_{m^j}^j\}$ où $d_i^j \in [\![1; B]\!]$. On suppose que $\sum_i d_i^j > B/n$, pour tout $j \in N$, sinon on peut accepter les demandes de tout agent demandant moins de B/n, mettre à jour le budget, et retirer l'agent en question de l'expérience. Une solution réalisable $S = (S^1, \ldots, S^n)$ est un n-uplet vérifiant $S^j \subseteq D^j$, $\forall j \in N$, ainsi que la contrainte de budget $\sum_{j \in N} \sum_{d \in S^j} d \leq B$. Pour une solution $S = (S^1, \ldots, S^n)$, la valeur de S^j est $s^j := v(S^j) = \sum_{d \in S^j} d$, et la valeur de S est définie par $\sum_{j \in N} s^j$. L'utilité d'un agent j pour S est égale à s^j, ce qui correspond à la valeur totale de ses demandes acceptées.

Le problème BUDGET APPORTIONMENT est étudié sous l'angle de l'équité et de l'efficacité. Les critères et fonctions objectif sont les suivants.

Équité et relaxations. Une solution S est :

- **max-min** si aucune solution $T = (T^1, \ldots, T^n)$ ne vérifie $\min_{j \in N} t^j > \min_{j \in N} s^j$ (où $t^j = v(T^j)$).
- Proportionnelle (**PROP**), si chaque agent reçoit B/n.
- Proportionnelle à une demande près (**PROP1**) (resp., à toute demande près (**PROPX**)) si pour $j \in N$, $D^j = S^j$ ou $s^j + d \geq B/n$ pour une certaine demande $d \in D^j \setminus S^j$ (resp., pour toute $d \in D^j \setminus S^j$).

— Sans jalousie (**SJ**) si $s^j \geq s^i$ est vérifié pour tout couple $(i, j) \in N$.
— Sans jalousie à une demande près (**SJ1**) (resp., à toute demande près (**SJX**)) si pour tout couple d'agents $(i, j) \in N^2$ tels que $s^j < s^i$, alors $s^j \geq s^i - d$ est verifié pour une demande $d \in S^i$ (resp., pour toute demande $d \in S^i$).

Efficacité. Une solution S est :
— Utilitariste optimale (**UO**) si aucune solution T ne vérifie $\sum_{j \in N} t^j > \sum_{j \in N} s^j$.
— Pareto optimale (**PO**) s'il est impossible d'augmenter l'utilité d'un agent sans dégrader celle d'un autre.

Résultats

Les critères d'équité et d'efficacité ne sont pas indépendants. Par exemple, il est clair qu'une solution PROP est PO, max-min ou encore SJ. Notre première contribution est ainsi de caractériser tous les liens logiques entre les différents critères.

Pour chaque couple de critères équité/efficacité, nous étudions le problème associé : Est-il possible de les allier au sein d'une même solution ? Si oui, une telle solution peut-elle être calculée en temps polynomial ? Par exemple, nous montrons que PO peut toujours être combiné avec max-min ou PROPX, mais pas en temps polynomial (en supposant P≠NP). Nous proposons alors un algorithme qui retourne une ε-approximation d'une solution PO tout en étant PROPX, le tout en temps polynomial en la taille de l'instance et $1/\varepsilon$. [1]

Le caractère conflictuel de l'association efficacité/équité nous amène naturellement à considérer le prix de l'équité – de l'anglais *price of fairness* (PoF) [1]. Associé à un critère d'équité A, cette notion est définie comme le plus grand rapport possible entre la valeur d'une solution respectant A et la valeur d'une solution maximisant la somme des utilités. Le PoF quantifie ainsi la perte d'efficacité induite par le respect d'un critère d'équité. Nous obtenons des résultats significatifs dans ce domaine puisque nous caractérisons le PoF de chaque critère d'équité, dans deux scénarios : le premier autorise des demandes de taille quelconque (mais inférieures au budget B), le second impose des demandes inférieures à B/n. L'intérêt de restreindre la taille des demandes découle du fait que sans cela, les pires cas sont souvent atteints par des instances "extrêmes" dont certaines demandes sont égales à l'entièreté du budget. Nous obtenons par exemple que le PoF des critères PROPX et max-min sont non bornés dans le cas général. Dans le cas des petites demandes, nous obtenons une valeur bien plus proche de 1 : $\frac{n+1}{n}$. Ceci montre que lorsque les demandes sont raisonnablement petites, il existe des solutions équitables, dont l'efficacité est quasi-optimale.

Références

[1] Ioannis Caragiannis, Christos Kaklamanis, Panagiotis Kanellopoulos, and Maria Kyropoulou. The efficiency of fair division. *Theory of Computing Systems*, 50(4) :589–610, 2012.

[2] Pierre Cardi, Laurent Gourvès, and Julien Lesca. Worst-case bounds for spending a common budget. In *Proceedings of the 20th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS'21)*, pages 288–296, Richland, SC, 2021.

[3] Eric J. Friedman, Vasilis Gkatzelis, Christos-Alexandros Psomas, and Scott Shenker. Fair and efficient memory sharing : Confronting free riders. In *The Thirty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence, AAAI*, pages 1965–1972, Palo Alto, California, USA, 2019.

[4] Ewa Kiryluk-Dryjska. Fair division approach for the european union's structural policy budget allocation : An application study. *Group Decision and Negotiation*, 23 :597–615, 2014.

1. T est une ε-approximation de S si $s^j \leq (1 + \varepsilon)t^j$ est vérifié pour tout $j \in N$.