Least Core des jeux de vote pondéré par l'approche Arc-flow

Sofiane Touati[1], Mohammed Said Radjef[1]

Unité de Recherche LaMOS, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie

{sofiane.touati,mohammedsaid.radjef}@univ-bejaia.dz

Mots-clés : *Jeux de vote pondéré, Least Core, Arc-flow.*

1 Introduction

La théorie des jeux coopératifs à utilité transférable développe les outils mathématiques de partage des gains/coûts acquis collectivement par des coalitions de joueurs sur la base de critères "désirés". Les concepts les plus étudiés et appliqués sont la valeur de Shapley et le coeur.

Dans ce papier, l'intérêt est porté au calcul du coeur des jeux de vote pondéré simple et multiple. Cette classe de jeux de vote a été introduite dans [8] afin de mesurer le pouvoir des états dans l'élection présidentielle américaine. Formellement, un jeu de vote pondéré simple est caractérisé par le triplet (N, v, p, q), où $N = \{1, ..., n\}$ est l'ensemble des joueurs, indexés de 1 à n ; $v(.) : 2^N \to \mathbb{R}$ est une fonction caractéristique, associant à chaque coalition $S \in 2^N$ un nombre réel $v(S) \in \mathbb{R}$, appelé valeur (gain ou coût) de la coalition S à partager entre les joueurs la constituant avec $v(\emptyset) = 0$; $p = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur, où chaque composante $p_i > 0$ désigne le poids du joueur $i \in N$ dans le vote ; $q > 0$ est appelé quota ; 2^N est l'espace des sous-ensembles de N. Une coalition $S \in 2^N$ est dite gagnante, si $p(S) = \sum_{i \in S} p_i \geq q$. Notons par W l'ensemble des coalitions gagnantes. Un jeu de vote pondéré multiple est une conjonction de jeux simples, chacun est défini par des poids et un quota ; une coalition est gagnante, si elle l'est dans chacun des jeux simples.

Un vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ appartient au coeur $C(N, v, p, q)$ d'un jeu de vote pondéré (N, v, p, q), si $x(N) = 1$ et $x(S) \geq 1, \forall S \in W$. L'inconvénient du Coeur est qu'il est non vide que s'il y a un joueur véto, i.e. appartenant à toutes les coalitions gagnantes. Pour palier à la vacuité du coeur dans les jeux de vote, le concept de Least Core a été introduit pour répondre à la problématique du partage du pouvoir total entre les joueurs, en minimisant la part de pouvoir non perçue par les coalitions gagnantes. Pour un problème de partage de bénéfice, le Least Core peut être vu comme un modèle de taxation (forfaitaire) permettant de forcer les joueurs à accepter le partage. Une coalition qui quitte la grande coalition se verra amputée d'une partie de son bénéfice. Le Least Core est l'ensemble $L_{\epsilon^*}(N, v, p, q)$, où $\epsilon^* = \inf\{\epsilon > 0,\ L_\epsilon(N, v, p, q) \neq \emptyset\}$ et $L_\epsilon(N, v, p, q) = \{x \in \mathbb{R}^n : x(N) = 1, x(S) \geq 1 - \epsilon, \forall S \in W\}$ est appelé ϵ-coeur.

2 Position du problème et approche de résolution

Le calcul du Least Core peut être fait via la résolution du programme linéaire suivant : $\min\{x(N) : x(S) \geq 1, \forall S \in W\}$. Ce type de programme nécessite une génération de colonne pour être résolu. La complexité de calcul du Least Core a été étudiée dans [6], où les auteurs ont proposé un algorithme de complexité pseudo-polynomiale. Une autre approche appelée DP-flow a été proposée dans [9], pour les jeux de vote pondéré simple. L'idée est de coder l'ensemble des coalitions gagnantes par un graphe. L'approche proposée dans cet article est appelée Arc-flow. Elle est similaire à l'approche DP-flow, mais repose sur un codage graphique différent. Elle a été développée dans [10] pour le problème de Bin Packing, puis améliorée et étendue à d'autres variantes [1, 4]. L'approche construit un graphe orienté possédant un sommet "source" et un sommet "puits", où les arcs représentent les poids. Un chemin de la "source" au "puits" représente une coalition dont le poids total est égal à la somme des poids des arcs qui le constitue. En reformulant la contrainte définissant les coalitions gagnantes, le programme précédent coïncide avec le dual du modèle de Gilmore-Gomory. Ce dernier étant équivalent au modèle Arc-flow, on peut donc passer par l'approche Arc-flow au lieu de résoudre directement le PL originel.

L'approche proposée permet de ramener le problème du calcul du Least Core à la résolution d'un programme linéaire de taille pseudo-polynomiale [3], à la portée des solvers de programmation linéaire disponibles. Nous avons appliqué l'approche pour un jeu de vote pondéré simple et multiple. Pour cela, nous avons utilisé le solver de Bin Packing VPSolver [2]. VPSolver est meilleure en temps d'exécution que l'approche DP-flow, et reste concurrentielle à la génération de colonne [5].

Le tableau suivant résume les résultats numériques de l'approche Arc-flow pour le Conseil de l'union européenne et le College Electoral US, tirés de [7, 9]. Le premier est un jeu de vote pondéré multiple, conjonction de trois jeux de vote simple, et le deuxième est un jeu simple. n_var, n_cont désignent respectivment le nombre de variables et de contraintes du programme linéaire relatif au calcul du Least Core.

Dénomination	n	ϵ^*	Taille du PL (n_var , n_cont)	Temps (seconde)
College Electoral US	51	0.4981	(2295, 263)	1.5216
Council of the EU	27	0.2608	(883 , 270)	0.4804

Pour conclure, nous avons proposé l'approche Arc-flow pour le calcul du Least Core des jeux de vote pondéré simple et multiple. Le calcul du Least Core a été ramené à la résolution d'un programme linéaire de taille pseudo-polynomiale, généré par le solver de Bin Packing VPSolver. Le temps d'exécution de l'approche est de l'ordre de la seconde.

Références

[1] Brandao, F., & Pedroso, J. P. (2016). Bin packing and related problems : General arc-flow formulation with graph compression. Computers & Operations Research, 69, 56-67.

[2] Brandao, F. (2016). VPSolver 3 : multiple-choice vector packing solver. arXiv :1602.04876.

[3] Brandao, F. D. A. (2017). Cutting & packing problems : general arc-flow formulation with graph compression. Working paper, University of Porto.

[4] de Lima, V. L., Alves, C., Clautiaux, F., Iori, M., & de Carvalho, J. M. V. (2022). Arc flow formulations based on dynamic programming : Theoretical foundations and applications. European Journal of Operational Research, 296(1), 3-21.

[5] Delorme, M., Iori, M., & Martello, S. (2016). Bin packing and cutting stock problems : Mathematical models and exact algorithms. European Journal of Operational Research, 255(1), 1-20.

[6] Elkind, E., Goldberg, L. A., Goldberg, P. W., & Wooldridge, M. (2009). On the computational complexity of weighted voting games. Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 56(2), 109-131.

[7] Fatima, S. S., Wooldridge, M., & Jennings, N. R. (2008). A linear approximation method for the Shapley value. Artificial Intelligence, 172(14), 1673-1699.

[8] Shapley, L. S., & Shubik, M. (1954). A method for evaluating the distribution of power in a committee system. American political science review, 48(3), 787-792.

[9] Tanaka, M., & Matsui, T. (2022). Pseudo polynomial size LP formulation for calculating the least core value of weighted voting games. Mathematical Social Sciences, 115, 47-51.

[10] Valério de Carvalho, J. M. (1999). Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. Annals of Operations Research, 86, 629-659.