Exploration arborescente et décomposition pour le problème de plus grand graphe partiel commun

Etienne de Gastines, Arnaud Knippel
INSA Rouen Normandie, Laboratoire de Mathématiques, Rouen, France
{etienne.mace_de_gastines, arnaud.knippel}@insa-rouen.fr

Mots-clés : *plus grand graphe partiel commun ; retour sur trace ; décomposition ; brisure de symétrie*

1 Introduction

Le problème du plus grand graphe partiel commun (Maximum Common Edge Subgraph - MCES) a été introduit en premier par Bokhari [4], pour résoudre le problème d'affectation de tâches à des processeurs tout en maximisant les demandes de communications entre tâches. Ce problème donne également une mesure de similarité entre deux graphes et est utilisé comme outil pour comparer des molécules.

Il peut être énoncé comme suit :

Soit $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes. $S = (V_S, E_S)$ est un graphe partiel de G si $V_S \subseteq V_G$ et $E_S \subseteq E_G$. Si un graphe partiel de G est isomorphe à un graphe partiel de H, alors on le qualifie de graphe partiel commun à G et H. On recherche un graphe partiel commun à G et H maximal en terme de nombre d'arêtes.

Le problème est $\mathcal{NP}$-difficile et généralise les problèmes d'isomorphisme de sous-graphe, de clique maximale et de chaînes hamiltoniennes.

Les principales approches pour résoudre ce problème sont l'approche polyhédrale [1], [6], [5], [2], [3] et la programmation par contrainte [7].

2 Modèle proposé

Nous proposons un modèle par exploration arborescente. Nous posons les variables x_u pour tout $u \in V_G$ ayant pour domaine $D(x_u) = V_H$ qui indiquent le sommet de H associé à u. Ces domaines ne sont pas maintenus mais déduits des valeurs des variables x. Dans l'arbre de recherche, les sommets de G sont un à un associé à un sommet de H. Une paire d'arêtes $(e_1, e_2) \in (E_S \times E_G)$ est associée lorsque leurs extrémités sont deux à deux associées (ces arêtes appartiennent alors au graphe partiel commun).

Nous montrons que l'utilisation de variables d'arcs peut être évitée dans les approches par programmation par contrainte si la propagation maintient la cohérence d'arc. Nous montrons également que les domaines de variables peuvent être simplement déduits des valeurs des variables à un point donné de l'arborescence, justifiant ainsi l'utilisation d'une approche sans propagation de contraintes.

Pour tout $u \in V_G$, nous définissons $d^f_G(u)$ le nombre d'arêtes non associées et adjacentes à u. Nous montrons que la relation suivante donne une borne duale plus forte que la borne duale naïve consistant à compter les arêtes de G qui ne sont pas associées.

$$z + \sum_{u \in A_G} \min\left(d^f(u), d^f(x_u)\right) + \frac{1}{2} \sum_{u \in V_G \setminus A_G} \min\left(d^f(u), d^f(x_u))\right) \tag{1}$$

Cette borne duale peut se calculer via la résolution d'un problème d'affectation. On montre que cette borne duale se calcule efficacement par approche gloutonne si les graphes sont non-orientés.

Nous proposons plusieurs approches pour diminuer l'espace de recherche. Une première approche se propose de briser les symétries en se basant sur la dominance de solution, obtenue en considérant des permutations de sommets.

Dans le cas où le graphe H est non connexe, nous décrivons une méthode de décomposition, qui consiste à répartir les sommets en deux sous-ensembles selon la partie connexe qui leur est affectée. Le problème se réduit alors à deux sous-problèmes sur chacune des parties connexes du graphe. Nous adaptons la borne duale précédente sur le problème maître et montrons comment la calculer de manière efficace. Nous adaptons cette méthode de décomposition lorsque le graphe possède un séparateur de faible taille.

Références

[1] H. A. Almohamad and S. O. Duffuaa, *A Linear Programming Approach for the Weighted Graph Matching Problem*, IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, **15**, (1993), 522–525

[2] Bahiense, L. and Piva, B. and de Souza, C., *A branch&cut algorithm for the maximum common edge subgraph problem*, Electronic Notes in Discrete Mathematics **35** (2009), 47–52.

[3] Bahiense, L. and Manić, G and Piva, B. and de Souza, C., *The maximum common edge subgraph problem : A polyhedral investigation*, Discrete Applied Mathematics **160** (2012), 2523–2541.

[4] Bokhari, *On the Mapping Problem*, IEEE Transactions on Computers **3** (1981), 207–214.

[5] Marenco, Javier and Loiseau, Irene, "A branch&cut algorithm for a problem arising in parallel programming environments ", Universidade de Buenos Aires, Departamento de Computación, (2000).

[6] Marenco, Javier and Loiseau, Irene, "Un algoritmo branch-and-cut para el problema de mapping ", Master thesis, Universidade de Buenos Aires, Departamento de Computación, (1999).

[7] Ndiaye, Samba Ndojh and Solnon, Christine, *CP Models for Maximum Common Subgraph Problems*, 17th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP), (2011), 637-644.