Envie entre groupes d'agents dans des problèmes d'affectation

Nathanaël Gross–Humbert, Nawal Benabbou, Aurélie Beynier, Nicolas Maudet

LIP6, Sorbonne Université, France

{nom.prenom}@lip6.fr

Mots-clés : *allocation de ressources, partage équitable*

Dans cet article, nous nous intéressons aux problèmes d'allocation de ressources entre agents dans un cadre où les agents appartiennent à des groupes disjoints et ne peuvent obtenir qu'une seule ressource chacun (contrainte de type affectation ou "house allocation"). On peut rencontrer ce type de problème lors de l'affectation des logements sociaux à des familles (les groupes pouvant représenter les différentes catégories sociales, ou d'autres caractéristiques des demandeurs), ou encore des places dans des formations universitaires (les groupes pouvant correspondre au statut de boursier ou non des étudiants). Nous nous intéresserons ici plus particulièrement à l'équité vis à vis des groupes d'agents, ces derniers pouvant avoir des tailles différentes.

On considère une variante du problème de *house allocation* tenant compte des éléments suivants :

— un ensemble $\mathcal{N}$ de n agents, partitionné k groupes notés $T = \{T_1, \dots, T_k\}$,

— un ensemble $\mathcal{M}$ de m objets/ressources indivisibles,

— une fonction d'utilité $u_i : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ pour chaque agent $i \in \mathcal{N}$ décrivant les préférences de l'agent. Autrement dit, $u_i(h)$ est l'utilité de l'agent $i \in \mathcal{N}$ pour la ressource $h \in \mathcal{M}$.

Une allocation est une fonction $A : \mathcal{N} \to \mathcal{M} \cup \{\emptyset\}$ qui associe à chaque agent $i \in \mathcal{M}$ au plus un objet de sorte que $A(i) \cap A(j) = \emptyset$ pour tout $j \in \mathcal{M}$ avec $i \neq j$. Dans la suite, on notera $\mathcal{A}$ l'ensemble des allocations possibles.

L'objectif est d'identifier une allocation qui soit équitable vis à vis des différents groupes d'agents. Il s'agit donc de tenir compte aussi des préférences au niveau des groupes d'agents. Pour chaque groupe $T_p \in T$, on a :

— une fonction d'utilité $U_p : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ telle que $U_p(A)$ donne la satisfaction des agents du groupe dans l'allocation A. Dans cet article, cette satisfaction est quantifiée en utilisant le critère utilitaire standard : $U_p(A) = \sum_{i \in T_p} u_i(A(i))$.

— une fonction d'utilité $V_p : 2^{\mathcal{M}} \to \mathbb{R}$ représentant la satisfaction des agents du groupe quand il peut décider de l'affectation des objets aux agents de son groupe. Dans cet article, on suppose que les agents se répartissent les objets de sorte à maximiser l'utilité du groupe, c'est-à-dire : $V_p(M) = \max_{A \in \mathcal{A}} U_p(A)$.

Par abus de notation, pour tout sous-groupe $G \subseteq T_p$, on notera U_G l'utilité du groupe T_p restreint aux agents de G, i.e. $U_G(A) = \sum_{i \in G} u_i(A(i))$. De même, on notera $V_G(M)$ la valeur $V_p(M)$ restreinte aux agents dans G, i.e. $V_G(M) = \max_{A \in \mathcal{A}} U_G(A)$.

Récemment, le critère TEF (pour "Typewise Envy-Freeness") a été proposé pour définir l'envie d'un groupe vis à vis d'un autre groupe [1]. Traduit dans notre contexte, une allocation $A \in \mathcal{A}$ est dite sans envie au sens de TEF si et seulement si $U_p(A) \geq V_p(\cup_{i \in T_q} A(i))$ pour tout groupe $T_p, T_q \in T$. Toutefois, cette notion d'envie ne tient pas compte de la taille des groupes et favorise indirectement les groupes de plus petite taille. Par exemple, considérons un problème avec seulement trois objets à répartir entre deux groupes d'agents, le premier étant composé d'un seul agent, contre 100 agents pour le second. Pour ce problème, le premier groupe enviera toujours le second groupe s'il ne reçoit pas le meilleur des trois objets, alors que s'il recevait un des autres objets, il serait quand même dans une meilleure situation que l'autre groupe, ce dernier n'ayant que deux objets pour 100 agents. Une manière de tenir compte de la taille des groupes est de normaliser les utilités par la taille des groupes, c'est ce qui a été proposé dans l'article [2] avec la notion WEF (pour Weighted Envy-Freeness). Une allocation A est dite sans envie au sens de WEF si et seulement si $\frac{U_p(A)}{|T_p|} \geq \frac{V_p(\cup_{i \in T_q} A(i))}{|T_q|}$ pour tout $(T_p, T_q) \in T^2$. Cependant, cette notion d'envie n'est pas adaptée aux problèmes où chaque agent ne peut recevoir qu'au plus un objet, comme le montre l'exemple suivant : considérons un problème contenant un groupe composé d'un seul agent a_1, et un groupe de deux agents a_2 et a_3, et trois objets h_1, h_2 et h_3 tels que $u_1(h_1) = u_2(h_1) = u_1(h_2) = u_2(h_2) = 10$, $u_3(h_3) = 1$, et $u_1(h_3) = u_2(h_3) = u_3(h_1) = u_3(h_2) = 0$. Dans ce cas, une allocation A qui devrait satisfaire tous les partis serait $A(a_1) = \{h_1\}$, $A(a_2) = \{h_2\}$, $A(a_3) = \{h_3\}$, mais le groupe de deux agents sera envieux du groupe contenant l'agent a_1 tant que l'utilité de ce dernier ne sera pas nulle ($\frac{10+1}{2} < \frac{10}{1}$), même si le groupe de deux agents n'a aucun moyen d'améliorer sa situation.

Nos résultats

Pour contourner ces difficultés, nous proposons dans notre contexte de comparer des groupes de différentes tailles en considérant l'allocation projetée sur des groupes de même taille. Plus formellement, nous proposons la notion d'envie suivante :

Définition [Envie estimée par projection sur des groupes de même taille (EPGMT)] : Étant donné une allocation $A \in \mathcal{A}$, on dit que le groupe T_p envie au sens de EPGMT le groupe T_q si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée :

— $|T_p| \leq |T_q|$ et $U_p(A) < V_p(\cup_{i \in G} A(i))$ pour au moins un sous-groupe $G \subseteq T_q$ avec $|G| = |T_p|$.

— $|T_p| > |T_q|$ et $U_G(A) < V_G(\cup_{i \in T_q} A(i))$ pour au moins un sous-groupe $G \subseteq T_p$ avec $|G| = |T_q|$.

Pour cette nouvelle définition de l'envie, nous avons d'abord montré que déterminer si un groupe envie un autre pour une allocation donnée peut être réalisé en temps polynomial, en se ramenant à un problème d'affectation classique. Cependant, il existe des problèmes où aucune allocation n'est sans envie au sens de EPGMT. Nous avons montré qu'une relaxation de type "à un bien près" ne permet pas non plus de garantir l'existence d'une allocation sans envie. Nous proposons de mesurer le degré d'envie et introduisons la notion suivante.

Définition [Degré d'envie] : Étant donnée une allocation A, le degré d'envie d'un groupe $T_p \in T$ envers un groupe $T_q \in T$, noté $D(T_p, T_q, A)$, est défini comme suit :

— Si $|T_p| \leq |T_q|$, alors $D(T_p, T_q, A) = \frac{|\{G \in \mathcal{G} : U_p(A) < V_p(\cup_{i \in G} A(i))\}|}{|\mathcal{G}|}$ où $\mathcal{G} = \{G \subseteq T_q : |G| = |T_p|\}$.

— Si $|T_p| > |T_q|$, alors $D(T_p, T_q, A) = \frac{|\{G \in \mathcal{G} : U_G(A) < V_G(\cup_{i \in T_q} A(i))\}|}{|\mathcal{G}|}$ où $\mathcal{G} = \{G \subseteq T_p : |G| = |T_q|\}$.

La principale difficulté dans l'utilisation de cette mesure est la complexité de son calcul (liée à l'énumération de tous les sous-groupes). Il est en réalité possible de montrer que calculer le degré d'envie est complet pour la classe #P (classe des problèmes de comptage associée aux problèmes NP-complets, introduite dans [3]), ce qui signifie qu'il ne peut être calculé de manière exacte en temps polynomial (en supposant $P \neq NP$). Nous avançons cependant qu'il est possible de définir un algorithme probabiliste produisant un résultat ayant une probabilité supérieure à $\frac{3}{4}$ d'être à une distance $\epsilon > 0$ de la valeur exacte, en temps polynomial en n et en $\frac{1}{\epsilon}$. Pour le prouver, nous nous appuyons sur des résultats présentés dans [4].

Références

[1] N. Benabbou, M. Chakraborty, E. Elkind, Y. Zick. *Fairness Towards Groups of Agents in the Allocation of Indivisible Items*, Proc. of IJCAI'19, 2019.

[2] M. Chakraborty, A. Igarashi, W. Suksompong, Y. Zick. *Weighted Envy-Freeness in Indivisible Item Allocation*, ACM Transactions on Economics and Computation, 2021.

[3] L.G. Valiant, *The Complexity of computing the permanent* Computer Science Department, University of Edinburgh, Scotland 1979

[4] *Approximation Algorithms for NP-Hard Problems*, edited by Dorit s. Hochbaum, 1996.